इकाई 13

संख्याओं के साथ खेलना

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- संख्याओं को व्यापक रूप में लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, दो अंकों की एक संख्या ab को $ab = 10a + b$; तीन अंकों की एक संख्या abc को $abc = 100a + 10b + c$ के रूप में लिखा जा सकता है।
- संख्याओं का व्यापक रूप हमें संख्याओं से संबंधित अनेक समस्याओं को हल करने में सहायता करता है।
- संख्याओं को व्यापक रूप में लिखकर संख्याओं की 11, 10, 5, 2, 9 या 3 से विभाज्यता की जाँच के नियमों के तर्क को स्पष्ट किया जा सकता है।
- विभिन्न अंकों के लिए विभिन्न अक्षरों से संबद्ध अनेक संख्या पहेलियों को संख्या संक्रियाओं के नियमों का प्रयोग करते हुए हल किया जा सकता है।

(B) हल उदाहरण

उदाहरण 1 से 4 में, चार विकल्प दिए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही उत्तर लिखिए।

उदाहरण 1: तीन अंकों की संख्या xyz का व्यापक रूप है–

(a) $x + y + z$ (b) $100x + 10y + z$

(c) $100z + 10y + x$ (d) $100y + 10x + z$

हल सही उत्तर (b) है।

उदाहरण 2: $100a + b + 10c$ का सामान्य रूप है–

(a) abc (b) cab (c) bac (d) acb

हल सही उत्तर (d) है।

उदाहरण 3 : यदि $5 \times A = CA$ है, तो A और C के मान हैं–

(a) A = 5, C = 1 (b) A = 4, C = 2

(c) A = 5, C = 2 (d) A = 2, C = 5

हल सही उत्तर (c) है।

उदाहरण 4 : यदि 5 A + 25, B_2 के बराबर है, तो A + B का मान है–

(a) 15 (b) 10 (c) 8 (d) 7

हल सही उत्तर (a) है।

उदाहरण 5 से 7 में, रिक्त स्थानों को भरिए, ताकि कथन सत्य हो जाएँ।

उदाहरण 5 : संख्या $ab - ba$, जहाँ a और b अंक हैं तथा $a > b$ है, ________ से विभाज्य है।

हल 9

उदाहरण 6 : जब $100a + 10c + 9$ को सामान्य रूप में लिखा जाए, तो वह ________ होगा।

हल ac 9.

उदाहरण 7 : यदि $AB \times B = 9B$ है, तो A = ________ और B = ________ है।.

हल 9, 1.

उदाहरण 8 से 10 में, बताइए कि कथन सत्य हैं या असत्य–

उदाहरण 8 यदि abc, cab और bca अंकों a, b, और c से बनने वाली तीन अंकों वाली संख्याएँ हैं; तो इन संख्याओं का योग सदैव 37 से विभाज्य होता है।

हल सत्य

उदाहरण 9 : मान लीजिए कि ab दो अंकों की एक संख्या है। तब $ab + ba$, 9 से विभाज्य होता है।

हल असत्य

उदाहरण 10 : यदि कोई संख्या 2 और 4 से विभाज्य हो, तो वह संख्या 8 से विभाज्य होगी।

हल असत्य

उदाहरण 11: तीन अंकों की एक संख्या $42x$, 9 से विभाज्य है तो $1x$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $42x$, 9 से विभाज्य है, अत: इसके अंकों का योग अर्थात्

$4 + 2 + x$ को 9 से विभाज्य होना चाहिए।

अर्थात् $6 + x$ को 9 से विभाज्य होना चाहिए।

अर्थात् $6 + x = 9$ या 18, _____.

क्योंकि x एक अंक है, इसलिए $6 + x = 9$ या $x = 3$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 12: A और B के मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$\begin{array}{r} 4\,1\,A \\ +\;\;B\,4 \\ \hline 5\,1\,2 \end{array}$$ हो।

हल इकाई के स्तंभ से, A + 4 ऐसी संख्या देता है, जिसकी इकाई का अंक 2 है। अत:, A = 8 है। अब, 1+(1+B) अर्थात् 2 + B एक ऐसी संख्या है जिसका इकाई का अंक 1 है।

$$\begin{array}{r} 418 \\ +\;\;94 \\ \hline 512 \end{array}$$

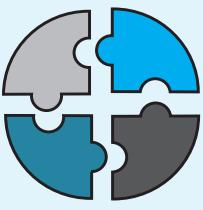
अत:, A=8 तथा B=9 है।

उदाहरण 13: मान लीजिए कि विभाजन $x \div 5$ से शेषफल 4 प्राप्त होता है तथा विभाजन $x \div 2$ से शेषफल 1 प्राप्त होता है। x की इकाई का अंक ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि $x \div 5$ से शेषफल 4 प्राप्त होता है, अत: इकाई का अंक 4 या 9 होना चाहिए। साथ $x \div 2$ से शेषफल 1 प्राप्त होता है, अत: इकाई का अंक 1 या 3 या 5 या 7 या 9 होना चाहिए। अत: इकाई का अंक 9 होगा।

समस्या हल करने की युक्ति पर अनुप्रयोग

उदाहरण 14:

यदि 756x, 11 से विभाज्य है, जहाँ x एक अंक है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

समस्या को समझिए और उसकी जाँच कीजिए।

- प्रश्न में क्या दिया है?

  एक चार अंकों की संख्या 756x, जो 11 से विभाज्य है।
- हमें क्या करना है?

  हमें x का मान ज्ञात करना है।
- समस्या हल करने के लिए किस गुण की आवश्यकता है?

  किसी संख्या की 11 से विभाज्यता।

एक युक्ति की योजना बनाइए

- दी हुई संख्या 756x के विषम स्थानों के अंकों का योग ज्ञात कीजिए।
- 756x के सम स्थानों के अंकों का योग ज्ञात कीजिए।
- चरण 1 और चरण 2 के परिणामों का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल कीजिए

- दिया है $y = 2x$
- विषम स्थानों के अंकों का योग = $x + 5$
- सम स्थानों के अंकों का योग = 6 + 7 = 13
- अंतर = $(x + 5) - 13$

  $= x - 8$

  अब, $(x - 8)$ या तो 0 के बराबर होना चाहिए या 11 का एक गुणज (अर्थात् 11, 22, 33, इत्यादि) होना चाहिए।

  $x - 8 = 0$ से

  $x = 8$ है तथा $x - 8 = 11$ से

  $x = 11 + 8 = 19$ है।
- क्योंकि x एक अंक है, अत: इसका मान 0 से 9 ही हो सकता है। अत:, $x = 8$ है। अत:, वाँछित संख्या 7568 है और x का मान 8 है।

पुनर्निरीक्षण

- 7568

  विषम स्थानों के अंकों का योग = 5 + 8 = 13

  सम स्थानों के अंकों का योग = 6 + 7 = 13

  अंतर = 13 – 13 = 0

  अत:, x का मान सही है।

सोचिए और चर्चा कीजिए

y का मान क्या होगा, यदि $277y$, 11 से विभाज्य है?

(C) प्रश्नावली

प्रश्न 1 से 17 में, चार विकल्प दिए हैं, जिनमें से केवल एक ही सही है। सही उत्तर लिखिए।

1. चार अंकों वाली संख्या $abdc$ का व्यापक रूप है–

(a) $1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$

(b) $1000\,a + 100\,c + 10\,b + d$

(c) $1000\,a + 100\,b + 10\,d + c$

(d) $a \times b \times c \times d$

2. दो अंकों की एक संख्या xy का व्यापक रूप है–

(a) $x + y$ (b) $10x + y$ (c) $10x - y$ (d) $10y + x$

3. $1000\ a + 10\ b + c$ का सामान्य रूप है–

(a) abc (b) $abco$ (c) $aobc$ (d) $aboc$

4. मान लीजिए abc एक तीन अंकों की संख्या है। तब, $abc - cba$ निम्न से विभाज्य नहीं है–

(a) 9 (b) 11 (c) 18 (d) 33

5. संख्या xyz के x, y और z अंकों द्वारा निर्धारित सभी संख्याओं का योग, विभाज्य है–

(a) 11 (b) 33 (c) 37 (d) 74

6. चार अंकों की एक संख्या $aabb$, 55 से विभाज्य है। तब, b का सभंव मान है (हैं)–

(a) 0 और 2 (b) 2 और 5 (c) 0 और 5 (d) 5 और 2

7. abc तीन अंकों की एक संख्या है तब, $abc + bca + cab$ निम्न से विभाज्य नहीं है–

(a) $a + b + c$ (b) 3 (c) 37 (d) 9

8. चार अंकों की एक संख्या $4\ ab\ 5$, 55 से विभाज्य है। तब $b - a$ का मान है–

(a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) 5

9. यदि abc एक तीन अंकों की संख्या है, तो संख्या $abc - a - b - c$ निम्न से विभाज्य है–

(a) 9 (b) 90 (c) 10 (d) 11

10. एक तीन अंकों की संख्या को दो बार लिखकर एक 6 अंकों की संख्या बनायी जाती है। उदाहरणार्थ, 256256, 678678 इत्यादि। इस प्रकार की संख्या निम्न से विभाज्य होगी–

(a) केवल 7 (b) केवल 11 (c) केवल 13 (d) 1001

11. यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य है, तो वह संख्या सदैव निम्न से विभाज्य होगी–

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 9

12. यदि $x + y + z = 6$ और z एक विषम अंक है, तो xyz है–

(a) 3 का एक विषम गुणज (b) 6 का एक विषम गुणज

(c) 3 का एक विषम गुणज (d) 9 का एक सम गुणज

13. यदि 5 A + B 3 = 65 है तो A और B के मान क्रमशः हैं–

(a) A = 2, B = 3 (b) A = 3, B = 2

(c) A = 2, B = 1 (d) A = 1, B = 2

14. यदि A 3 + 8 B = 150 है, तो A + B का मान है–

(a) 13 (b) 12 (c) 17 (d) 15

15. यदि 5 A × A = 399, तो A का मान है–

(a) 3 (b) 6 (c) 7 (d) 9

16. यदि 6 A × B = A 8 B है, तो A – B का मान है–

(a) –2 (b) 2 (c) –3 (d) 3

17. निम्न में से कौन-सी संख्या 99 से विभाज्य है?

(a) 913462 (b) 114345 (c) 135792 (d) 3572406

प्रश्न 18 से 33 में, रिक्त स्थानों को भरिए ताकि कथन सत्य हो जाएँ–

18. 3134673, 3 और ______ से विभाज्य है।

19. 20 x 3 का एक गुणज होगी, यदि अंक x या तो ______ या ______ होगा।

20. 3 x 5, 9 से विभाज्य है, यदि अंक x __________ है।

21. दो अंकों की किसी संख्या और उसके अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या का योग सदैव __________ से विभाज्य होता है।

22. दो अंकों की एक संख्या और उसके अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या का अंतर सदैव __________ से विभाज्य होता है।

23. तीन अंकों की एक संख्या और उसके अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या का अंतर 9 और __________ से विभाज्य होता है।

24. यदि $\begin{array}{r} 2\ B \\ +A\ B \\ \hline 8\ A \end{array}$ है, तो A = ______ और B = ______ है।

25. यदि $\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ B \\ \hline 9\ B \end{array}$ है, तो A = ______ और B = ______ है।

26. यदि $\begin{array}{r} B\ 1 \\ \times\ \ B \\ \hline 49\ B \end{array}$ है, तो B = _______ है।

27. 1 x 35, 9 से विभाज्य है, यदि x = _______ होगा।

28. चार अंकों की एक संख्या $abcd$, 11 से विभाज्य होगी, यदि $d + b - a - c$ = _______ या _______

29. एक संख्या 11 से विभाज्य होती है, यदि उसके विषम स्थानों के अंकों के योग और सम स्थानों के अंकों के योग का अंतर या तो 0 हो या ______ से विभाज्य हो।

30. यदि एक तीन अंकों की संख्या *abc*, 11 से विभाजित होगी, तो ______ या तो 0 होगा या 11 का गुणज होगा।

31. यदि A × 3 = 1A है, तो A = ______ है।

32. यदि B × B = AB है, तब या तो A = 2 और B = 5 होगा या फिर A = ______ और B = ______ होगा।

33. यदि एक दो अंकों की संख्या, जिसका दहाई का अंक t और इकाई का अंक u है, के बाद अंक 1 लगा दिया जाये, तो नयी संख्या ______ होगी।

प्रश्न 34 से 44 में बताइए कि कथन सत्य है या असत्य–

34. दो अंकों की एक संख्या *ab* सदैव 2 से विभाज्य होगी, यदि b या तो 0 हो या एक सम अंक होगा।

35. तीन अंकों की एक संख्या *abc*, 5 से विभाज्य होगी, यदि c एक सम अंक हो।

36. चार अंकों की एक संख्या *abcd*, 4 से विभाज्य होगी, यदि *ab*, 4 से विभाज्य हो।

37. तीन अंकों की एक संख्या *abc*, 6 से विभाज्य होगी, यदि c एक सम अंक हो और $a + b + c$, 3 का एक गुणज हो।

38. 3N + 2 के रूप की एक संख्या को 3 से भाग देने पर शेषफल 2 आता है।

39. संख्या 7N + 1 को 7 से भाग देने पर शेषफल 1 प्राप्त होगा।

40. यदि एक संख्या a, संख्या b से विभाज्य है, तो वह b के प्रत्येक गुणनखंड से विभाज्य होगी।

41. यदि AB × 4 = 192 है, तो A + B = 7 है।

42. यदि AB + 7C = 102 है, जहाँ B ≠ 0, C ≠ 0 है, तो A + B + C = 14 है।

43. यदि 213x 27, 9 से विभाज्य है, तो x का मान 0 होगा।

44. यदि N ÷ 5 से शेषफल 3 प्राप्त होता है और N ÷ 2 से शेषफल 0 प्राप्त होता है, तो N ÷ 10 से शेषफल 4 प्राप्त होता है।

निम्न प्रश्नों को हल कीजिये–

45. अंक '*a*' को कौन–सा न्यूनतम मान दिया जाये कि संख्या 91876a2, 8 से विभाज्य हो।

46. यदि $\begin{array}{r} 1\ P \\ \times\ \ P \\ \hline Q\ 6 \end{array}$ है, जहाँ Q – P = 3 है, तो P और Q के मान ज्ञात कीजिए।

47. यदि 1AB + CCA = 697 है और इस जोड़ में कोई हासिल नहीं लिया जाता है, तो A + B + C ज्ञात कीजिए।

48. पाँच अंकों की एक संख्या AABAA, संख्या 33 से विभाज्य है। इस रूप की सभी संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 49 से 60 में, अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए–

49.

$$\begin{array}{r} A\ A \\ +\ A\ A \\ \hline X\ A\ Z \\ \hline \end{array}$$

50.
$$\begin{array}{r} 8\ 5 \\ +4\ A \\ \hline B\ C\ 3 \\ \hline \end{array}$$

51.
$$\begin{array}{r} B\ 6 \\ +8\ A \\ \hline C\ A\ 2 \\ \hline \end{array}$$

52.
$$\begin{array}{r} 1\ B\ A \\ +\ A\ B\ A \\ \hline 8\ A\ 2 \\ \hline \end{array}$$

53.
$$\begin{array}{r} C\ B\ A \\ +\ C\ B\ A \\ \hline 1\ A\ 3\ 0 \\ \hline \end{array}$$

54.
$$\begin{array}{r} B\ A\ A \\ +\ B\ A\ A \\ \hline 3\ A\ 8 \\ \hline \end{array}$$

55.
$$\begin{array}{r} A\ 0\ 1\ B \\ +1\ 0\ A\ B \\ \hline B\ 1\ 0\ 8 \\ \hline \end{array}$$

56.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ \ 6 \\ \hline C\ 6\ 8 \\ \hline \end{array}$$

और B–A =1 है।

57.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ \times\ A\ B \\ \hline 6\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

58.
$$\begin{array}{r} A\ A \\ \times\ A \\ \hline C\ A\ B \\ \hline \end{array}$$

59.
$$\begin{array}{r} A\ B \\ -\ B\ 7 \\ \hline 4\ 5 \\ \hline \end{array}$$

60.
$$\begin{array}{r} 8\ A\ B\ C \\ -\ A\ B\ C\ 5 \\ \hline D\ 4\ 8\ 8 \\ \hline \end{array}$$

61. यदि 2A7 ÷ A = 33, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

62. 212 x 5 और 11 का गुणज है। x का मान ज्ञात कीजिए।

63. k का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ 31k 2, 6 से विभाज्य है।

64. 1y3y6, 11 से विभाज्य है। y का मान ज्ञात कीजिए।

65. 1513 x, 11 से विभाज्य है। x का मान ज्ञात कीजिए।

66. तीन अंकों की एक संख्या 2 a 3 को संख्या 326 में जोड़कर एक तीन अंकों की संख्या 5b9 प्राप्त की जाती है, जो 9 से विभाज्य है। $b - a$ का मान ज्ञात कीजिए।

67. मान जीजिए कि E = 3, B = 7 और A = 4 है। योग में अन्य अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{array}{r} B\ A\ S\ E \\ +\ B\ A\ L\ L \\ \hline G\ A\ M\ E\ S \\ \hline \end{array}$$

68. मान लीजिए कि D = 3, L = 7 और A = 8 है। निम्न योग में अन्य अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए–

```
  M A D
+   A S
+     A
-------
B U L L
```

69. यदि दो अंकों की एक संख्या में से वह संख्या घटायी जाये जो उसके अंकों को पलटने से प्राप्त होती है, तो प्राप्त परिणाम एक पूर्ण घन है। ऐसी कितनी संख्याएँ संभव हैं? इन सभी को लिखिए।

70. निम्न गुणन को कीजिए–

```
12345679
   ×   9
--------

--------
```

उपरोक्त परिणाम का प्रयोग करते हुए, निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

(a) 12345679 × 45 क्या होगा?

(b) 12345679 × 63 क्या होगा?

(c) 888888888 प्राप्त करने के लिए, 12345679 को किस संख्या से गुणा करना चाहिए?

(d) 999999999 प्राप्त करने के लिए, 12345679 को किस संख्या से गुणा करना चाहिए?

71. निम्न से प्रत्येक में अक्षरों के मान ज्ञात कीजिए–

```
(i)   P Q          (ii)   2 L M
    ×   6               + L M 1
    -----               -------
    Q Q Q                 M 1 8
```

72. यदि 148101B095, 33 से विभाज्य है, तो B का मान ज्ञात कीजिए।

73. यदि 123123A4, 11 से विभाज्य है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

74. यदि 56x32y, 18 से विभाज्य है, तो y का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

(D) अनुप्रयोग, खेल और पहेलियाँ

1. बहुभुजीय संख्याएँ

नीचे दिये हुए पैटर्नों का अध्ययन कीजिए और इसका विस्तार कीजिए। हम वर्ग संख्याओं के बारे में पहले से ही जानते हैं।

```
*        * *        * * *
         * *        * * *
                    * * *
1        4          9
```

ऐसे दो चित्र और बनाइए।

यहाँ पहली वर्ग संख्या के लिए 1^2 का प्रयोग कीजिए, दूसरी वर्ग संख्या के लिए 2^2 का प्रयोग कीजिए, तीसरी वर्ग संख्या ज्ञात करने के लिए 3^2 का प्रयोग कीजिए, इत्यादि। nवीं वर्ग संख्या लिखिए।

आइए अब त्रिभुजाकार संख्याओं की ओर चलें।

```
*        *          *          *
         * *        * *        * *
                    * * *      * * *
                               * * * *
1        3          6          10
```

अगली त्रिभुजाकार संख्या ज्ञात कीजिए।

nवीं त्रिभुजाकार संख्या ज्ञात करने के लिए, हम सूत्र $\frac{n \times (n+1)}{2}$ का प्रयोग करते हैं।

क्या आप पंच भुजाकार संख्याओं से परिचित हैं?

पहली तीन पंचभुजाकार संख्याएँ आपके लिए दी गयी हैं। ऐसी अगली संख्याएँ लिखिए।

```
  *        *     *          *     *     *

  1     *          *          *     *

             *          *     *     *     *

             5              *           *

                                 *
                                12
```

अगली पंचभुजाकार संख्या के लिए बिन्दु पैटर्न बनाइये। संपूर्ण आकार में बिंदुओं की संख्या गिनिए और इसे उस आकार के नीचे लिखिए।

2 :

यदि दी हुई संख्याएँ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 और 11 से विभाज्य हैं, तो उचित खाने में सही (√) का चिह्न लगाइए।

क्रम संख्या	संख्या	से विभाज्य है								
1.	40185	2	3	4	5	6	8	9	10	11
2.	92286									
3.	56390									
4.	419562									
5.	10593248									

3. क्रॉसवर्ड पहेली

उपरोक्त क्रॉस संख्या पहेली के प्रत्येक खाने को नीचे दिये संकेतों के अनुसार भरिए –

डाउन

(A) 59 ______ 63 ÷ 33

(B) 81 ______ 42 ÷ 6

(C) 7 ______ 6988 ÷ 11

(D) 37604 ______ 5 ÷ 15

(E) 56 ______ ÷ 10

एक्रॉस

(F) 90 ______ 815 ÷ 15

(G) 3514 ______ ÷ 12

(H) 4 ______ 07 ÷ 7

(I) 8 ______ 558 ÷ 6

(J) 6 ______ 5 ÷ 55

A

F E

B

G D

H C J

I